

1) آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

- ❖ تعریف منطق : منطق در لغت به معنای «آنچه به گفته درآمده» است.
- ❖ تعریف گزاره: یک جمله خبری که می تواند دارای ارزش درست (T) یا نادرست (F) باشد را گزاره می نامند.

- ☛ نکته : گزاره ها را معمولاً با نماد $p, q, r, \dots$ نمایش می دهند.
- ☛ نکته : به هر جمله ای که خبر می دهد گزاره می گویند.
- ☛ نکته : اگر گزاره درست باشد میگوییم ارزش آن درست است .
- ☛ نکته : اگر گزاره نادرست باشد میگوییم ارزش آن نادرست است .
- ☛ نکته : اگر سوال ، نظر شخصی باشد، آن گزاره نیست.
- ☛ نکته (vip) : در منطق ریاضی، جملات خبری ای که ارزش گذاری آنها سلیقه ای، نامفهوم و یا بی معنی باشد گزاره محسوب نمی شود همچنین جملات امری، پرسشی و عاطفی گزاره نیستند.

نکته : برای نمایش درست از T و برای نمایش نادرست میتوان از F هم استفاده کرد.

مثال :

(1) 5 عددی فرد است. ← گزاره با ارزش درست.

(2) شما اهل کجایی؟ ← گزاره نیست.

(3) درس عربی از درس ریاضی سخت تر است. ← گزاره نیست. (نظر سلیقه ای است).

(4) $15 < 5$ ← گزاره با ارزش نادرست .

P
د
ن
$2^1 = 2$

P	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن
$2^2 = 4$	

P	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن
$2^3 = 8$		

وضعیت ارزشی یک و دو و سه گزاره

نکته (vip): اگر n تعداد گزاره های دلخواه باشد جدول ارزش گذاری دارای 2^n ردیف خواهد بود

مثال : اگر چهار گزاره داشته باشیم آنگاه : $2^n = 2^4 = 16$

پس جدول ارزشگذاری دارای ۱۶ ردیف خواهد بود

HW ✍ : آیا عبارات زیر گزاره هستند ؟ ارزش آنها را تعیین کنید؟

- 1) زمستان سردترین فصل سال است.
- 2) اعداد طبیعی زیر مجموعه اعداد حقیقی نیستند.
- 3) 12 بر 5 بخش پذیر است.
- 4) فردا هوا گرم تر میشود؟
- 5) برای ثبت نام در آزمون مدارک همراه خود بیاورید.
- 6) هوای بارانی زیباتر از هوای آفتابی است.

❖ نقیض گزاره :

اگر p یک گزاره باشد نقیض آن ، گزاره ای است که ارزش آن درست عکس ارزش p باشد

☛ نکته: نقیض گزاره p را بانماد $\sim p$ نشان می دهیم .

☛ نکته: از آنجا که هر گزاره یک جمله خبری است و حتماً دارای فعل می باشد برای

بیان نقیض یک گزاره کافی است فعل جمله را نفی کنیم.

مثال: نقیض

(1) "اعداد فرد جزو اعداد حقیقی هستند" ← "اعداد فرد جزو اعداد حقیقی نیستند".

(2) "a عددی مثبت است" ← "a عددی مثبت نیست"

❖ نکته: طبق جدول زیر اگر یک گزاره دارای ارزش درست باشد بدیهی است که نقیض آن دارای ارزش نادرست خواهد بود و بالعکس.

P	$\sim P$
د	ن
ن	د

✍ HW : ارزش گزاره های زیر را تعیین کرده سپس نقیض آنها را بنویسید:

(1) عدد حقیقی وجود دارد که مربع آن منفی است.

(2) قدر مطلق هر عدد مثبتی برابر با عددی منفی است.

(3) 25 مضربی از 5 نیست.

❖ گزاره های هم ارز منطقی:

اگر دو گزاره هم ارز باشند می گوییم هم ارز منطقی هستند مثل P و $\sim(\sim P)$ و مینویسیم:

$$\sim(\sim P) \equiv P$$

❖ ترکیب گزاره :

از ترکیب دو یا چند گزاره ساده گزاره های مرکب ساخته می شوند.

ترکیب گزاره ها توسط 4 رابط : (و) ، (یا) ، (شرطی) ، (دوشرطی) انجام می شود.

☛ نکته: در گزاره های مرکب باید ارزش تک تک گزاره هارا بررسی کرد.

مثال :

1) 55 عددی فرد و 13 عددی اول است.

2) 26 بر 1 یا 2 بخش پذیر است.

☛ نکته : نقیض نقیض هر گزاره برابر است با خود گزاره . $\neg(\neg p) \equiv p$

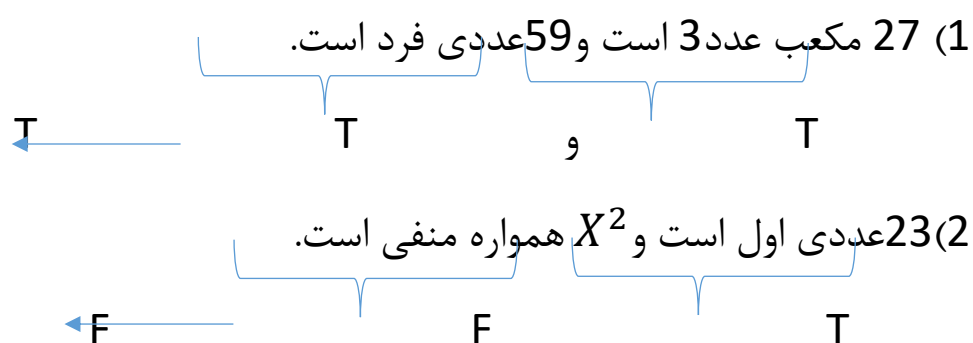
❖ ترکیب عطفی دو گزاره (و) :

اگر بین دو گزاره حرف ربط ، "و" باشد ، ترکیب عطفی ایجاد میشود که معمولا به صورت $p \wedge q$ نشان می دهیم و علامت " ^ " را رابط عاطف می نامیم.

P	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

☛ نکته: ترکیب عطفی دو گزاره زمانی دارای ارزش درست است که هر دو گزاره دارای ارزش درست باشند.

مثال:



HW ✍️: ارزش گزاره های زیر را تعیین کنید؟

$$2(x^2+4) = 2x^2 + 4 \wedge 3 \geq 4$$

$$25 \neq 6 \wedge \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

(2) 5 به توان 2 همواره منفی است و عدد 3- همواره از 6- کوچکتر است.

❖ ترکیب فصلی دو گزاره (یا) :

اگر بین دو گزاره حرف ربط "یا" باشد ، ترکیب فصلی ایجاد می شود که با نماد « $\vee$ » ، ،

« $p \vee q$ » نشان می دهیم و علامت « $\vee$ » را رابط فاصل می نامند.

P	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

🔴 نکته vip: ترکیب فصلی دو گزاره زمانی دارای ارزش نادرست است که هر دو گزاره دارای ارزش نادرست باشند.

🔴 نکته vip: اگر حداقل یکی از گزاره ها دارای ارزش درست باشد، آنگاه ارزش ترکیب فصلی آن درست است.
مثال:

1) عدد 0.5 اعشاری است یا 90 بر 4 بخش پذیر است:
T
F
T
T

2) $2^3 - 4 = 5$ $\vee$ $\sqrt[2]{81} + 5 = 76$

F ← F F

HW: ارزش گزاره های زیر را تعیین کنید:

(1) درخت کاج فوتوسنتز میکند یا 99 یک واحد از عدد 100 کمتر است.

(2) شهریور ماه 30 روز دارد یا 121 مضرب 12 است.

❖ قوانین هم ارزی های منطقی :

(1) قوانین جابجایی :

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

(2) قوانین شرکت پذیری:

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

(3) قوانین دمورگان :

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

4) قوانین جذب :

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

5) قانون تبدیل گزاره شرطی به فصلی :

اگر p و q دو گزاره باشند، همواره هم ارزی زیر برقرار است: یعنی مقدم نقیض می شود و گزاره شرطی به فصلی تبدیل می شود.

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$$

❖ ترکیب شرطی دو گزاره (اگر)....(آنگاه) :

اگر بخواهیم از گزاره p گزاره را نتیجه بگیریم از نماد  استفاده می کنیم و می

نویسیم: p  q

و به 3 صورت می خوانیم: 1) اگر p آنگاه q 2) p نتیجه میدهد q را

3) q از p نتیجه می شود .

☛ نکته: در گزاره های شرطی جمله اول را "مقدم" و جمله دوم را "تالی" می نامند.

P	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

💡 نکته: اگر در گزاره های شرطی جمله اول نادرست باشد، در نهایت گزاره شرطی دارای ارزش درست است.

💡 نکته: اگر در گزاره های شرطی جمله اول نادرست و جمله دوم نیز نادرست باشد، در نهایت گزاره شرطی دارای ارزش درست است.

❖ انتفای مقدم:

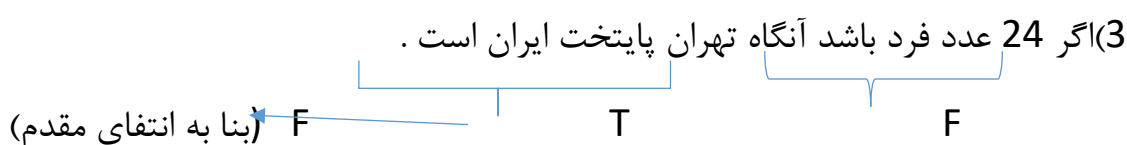
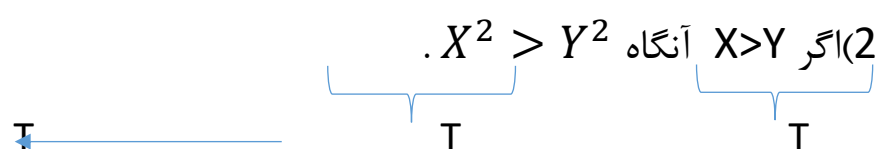
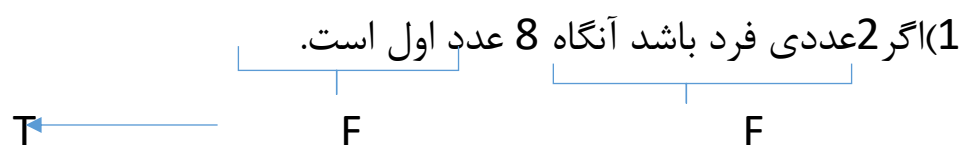
برای اشاره به آن دسته از گزاره های منطقی استفاده می شود که در مورد یک مجموعه تهی بیان شده اند. می توان نشان داد که هر گزاره ای که درباره یک مجموعه تهی بیان شده باشد از دید منطقی درست است.

مثال: اگر مجموعه ای تهی مانند a داشته باشیم و یک ویژگی از مجموعه ای مانند b را به آن نسبت دهیم گزاره همواره درست است زیرا نقیض آن این است که حتماً عضوی از b در a باشد که ویژگی b را نداشته باشد در حالی که مجموعه a تهی است و عضوی ندارد و نقیض گزاره نادرست است پس گزاره درست است.

💡 نکته :

در یک گزاره شرطی، اگر مقدم نادرست باشد، آنگاه کل گزاره به انتفای مقدم درست است.

مثال:



HW: ارزش گزاره های زیر را تعیین کنید.

(1) اگر $24 = 4^2$ آنگاه 1 عددی اول است.

(2) اگر قرمز رنگ اصلی باشد آنگاه 24 عددی مثبت است.

❖ ترکیب دو شرطی:

هرگاه بخواهیم از گزاره p ، q را نتیجه بگیریم و از گزاره p, q را نتیجه بگیریم از نماد $\Leftrightarrow$ استفاده می کنیم.

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

ترکیب دو شرطی را به این صورت می خوانیم:

(1) اگر p آنگاه q و برعکس

(2) P شرط لازم و کافی برای q

(3) P اگر و تنها اگر q

P	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

نکته: ارزش گزاره دوشروطی زمانی درست است که ارزش هر دو گزاره درست یا ارزش هر دو گزاره نادرست باشد. یعنی: $p \equiv q$

P	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن	د	د

خلاصه 4 ترکیب برای دو گزاره:

مثال: (1) کسر $\frac{2X+5}{X}$ عدد گویا است اگر و تنها اگر 81 عدد زوج باشد.

HW ✍ ارزش گزاره های زیر را تعیین کنید:

(1) X^2 همواره عددی زوج است اگر و تنها اگر 3- عددی فرد باشد

(2) $35 < 224$ است اگر و تنها اگر 8 عددی اول باشد.

❖ استدلال ریاضی:

یک استدلال از چند جمله خبری (ملزومات استدلال) و یک نتیجه (نتیجه استدلال) تشکیل می شود.

مثال: اعداد اول بزرگ تر از یک فرد هستند.

a عدد اول بزرگ تر از یک است.

نتیجه: a عدد فرد است.

☛ نکته: اولین گام برای استدلال ریاضی این است که عبارت توصیفی رابه زبان ریاضی بنویسیم.

مثال: عبارات توصیفی زیر را به صورت ریاضی بنویسید:

(1) اگر عددی را 3 برابر کنیم و با عدد 5 جمع کنیم حاصل از خود عدد بزرگتر است؟

✓ حل: $3X + 5 > X$

(2) عددی را در خمس آن ضرب کرده ایم و سپس بر حاصل ضرب 4 افزوده ایم، حاصل آن از دو برابر عدد بزرگتر شده است.

✓ حل: $X \left(\frac{1}{5} X + 4 \right) > 2X$

3) 15 درصد از قیمت فروش کالایی سود آن است.

✓ حل : قیمت فروش = X

قیمت خرید = Y

$$\frac{15}{100} X = X - Y$$

HW ✍:

1) جذر 81 را با عدد 3 جمع میکنیم و حاصل را بر 4 تقسیم میکنیم حاصل از 56 کوچکتر خواهد شد.

2) حاصلضرب طول در عرض یک مستطیل از دو برابر عرض آن بزرگتر است.

❖ قیاس :

قیاس به معنای مقایسه کردن و یکی از ابزارهای مهم در استدلال ها، به ویژه استدلال های ریاضی هستند .

❖ قیاس استثنایی :

کاربردی ترین قیاس در ریاضی است که شامل دو مقدمه و یک نتیجه است.

☀ نکته: سه نقطه (.:) نماد نتیجه است.

مثال برای قیاس استثنایی:

مقدمه 1: اگر هوا ابری باشد، باران میبارد.

مقدمه 2: هوا ابری است.

نتیجه: باران میبارد.

مقدمه 1: اگر امروز سه‌شنبه باشد، باید به مدرسه بروم.

مقدمه 2: امروز سه‌شنبه است.

نتیجه: باید به مدرسه بروم.

مقدمه 1: اگر دانشگاه را تمام نکند، مدرک تحصیلی نمی‌گیرد.

مقدمه 2: دانشگاه را تمام نکرد.

نتیجه: مدرک تحصیلی نمی‌گیرد.